

МИНОБРНАУКИ РОССИИ



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«**Российский государственный гуманитарный университет**»  
(ФГБОУ ВО «РГУ»)

ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ, УПРАВЛЕНИЯ И ПРАВА  
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ  
Кафедра моделирования в экономике и управлении

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

---

38.03.01 «Экономика»

*Код и наименование направления подготовки/специальности*

---

«Экономика бизнеса»

*Наименование направленности (профиля)/ специализации*

Уровень высшего образования: *бакалавриат*

Форма обучения: *очно-заочная*

РПД адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями  
здоровья и инвалидов

Москва 2024

*Теория вероятностей и математическая статистика*  
Рабочая программа дисциплины

Составитель(и):  
*доцент, Е.А. Куренкова*

УТВЕРЖДЕНО  
Протокол заседания кафедры  
№ 6 от 04.04.2024

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

1.	Пояснительная записка .....	4
1.1.	Цель и задачи дисциплины .....	4
1.2.	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций.....	4
1.3.	Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	5
2.	Структура дисциплины.....	5
3.	Содержание дисциплины.....	5
4.	Образовательные технологии.....	7
5.	Оценка планируемых результатов обучения.....	7
5.1	Система оценивания.....	7
5.2	Критерии выставления оценки по дисциплине .....	8
5.3	Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.....	9
	Граница интервала.....	17
6.	Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	19
6.1	Список источников и литературы.....	19
6.2	Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».....	19
7.	Материально-техническое обеспечение дисциплины .....	20
8.	Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов.....	20
9.	Методические материалы.....	21
9.1	Планы семинарских/ практических/ лабораторных занятий.....	21
	Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины .....	23
	Граница интервала.....	30
	Приложение 1. Аннотация рабочей программы дисциплины.....	32

## 1. Пояснительная записка

### 1.1. Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины – общематематическая подготовка студентов, необходимая для освоения математических и статистических методов в управлении и экономике; воспитание у студентов навыков логического мышления и формального обоснования принимаемых решений.

Задачи дисциплины:

изучение основ математического аппарата;  
 выработка навыков решения типовых вероятностных задач;  
 развить логическое и алгоритмическое мышление, умение строго излагать свои мысли;  
 выработка навыков к математическому исследованию теоретических и практических задач экономики и управления;

сформировать умение выбирать математический инструментарий для построения моделей экономических и управленческих процессов, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы.

### 1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Компетенция (код и наименование)	Индикаторы компетенций (код и наименование)	Результаты обучения
<i>ОПК-2</i> <i>Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач</i>	<i>ОПК-2.1</i> <i>Использует методы сбора, анализа и оценки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике</i>	<i>Знать:</i> методы сбора, анализа и обработки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике; <i>Уметь:</i> использовать методы сбора, анализа и оценки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике; <i>Владеть:</i> навыками применения современного математического инструментария для сбора, анализа и оценки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике;
	<i>ОПК-2.2</i> <i>Анализирует результаты экономико-статистических исследований и делает на их основе качественные и количественные выводы для решения практических задач</i>	<i>Знать:</i> методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования; <i>Уметь:</i> оценить и проанализировать результаты экономико-статистических исследований и делает на их основе качественные и количественные выводы для решения практических задач; <i>Владеть:</i> методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки и анализа результатов экономико-статистических исследований.

### 1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к обязательной части блока дисциплин учебного плана.

Для освоения дисциплины необходимы знания, умения и владения, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин и прохождения практик: «Математический анализ».

В результате освоения дисциплины формируются знания, умения и владения, необходимые для изучения следующих дисциплин и прохождения практик: «Экономическая статистика».

## 2. Структура дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 академических часа (ов).

### Структура дисциплины для очно-заочной формы обучения

Объем дисциплины в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Семестр	Тип учебных занятий	Количество часов
3	Лекции	12
3	Семинары	12
Всего:		24

Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся составляет 84 академических часа(ов).

## 3. Содержание дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание
1	Основные понятия теории вероятностей	Предмет теории вероятностей и ее связь с реальностью. Различные подходы к определению вероятности. Примеры вероятностных задач (маркетинг, контроль качества, разработка товаров и т.п.). Событие. Случайные события как подмножества множества простейших исходов. Основные понятия алгебры событий. Вероятность события. Свойства вероятности. Частота, или статистическая вероятность, события. Принцип практической уверенности. Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.
2	Основные теоремы теории вероятностей	Теорема сложения и следствия из нее. Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения и следствия из нее. Система гипотез. Формула полной вероятности и теорема Байеса. Принятие решений: байесовский подход. Пример использования дерева решений для проведения маркетингового исследования по продаже нового

		товара фирмой. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
3	Случайные величины, способы их задания и числовые характеристики	Случайная величина. Примеры случайных величин. Виды случайных величин (конечные, дискретные, непрерывные). Ряд распределения, многоугольник распределения. Функция распределения как универсальная характеристика случайной величины и ее свойства. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Эффект нулевой вероятности. Характеристики положения: математическое ожидание, мода, медиана. Моменты: дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Свойства математического ожидания и дисперсии.
4	Основные законы распределения случайных величин	Биномиальное распределение и его параметры. Использование биномиального распределения при решении задач, связанных с контролем качества продукции. Распределение Пуассона и его параметры. Применение распределения Пуассона при расчете необходимой численности персонала подразделения с заданным объемом объектов обработки. Нормальное распределение и его параметры. Теоремы Муавра - Лапласа. Примеры решения задач, связанных с гарантийным обслуживанием. Задачи о конкуренции. Показательное распределение и его параметры. Решение задач по определению времени ожидания получения ответа на запрос. Равномерное распределение и его параметры. Расчет вероятности исполнения заказа в заданное время.
5	Системы случайных величин	Понятие о системе случайных величин. Система двух случайных величин. Закон распределения, функция распределения, условные законы распределения. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Регрессия и корреляция. Коэффициент корреляции и его свойства. Линейная регрессия. Реальные примеры корреляционной связи между объемом продаж и затратами на рекламу, заработной платой и объемом производства.
6	Закон больших чисел	Устойчивость средних и закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Основные предельные теоремы. Центральная предельная теорема и ее приложения.
7	Основные понятия математической статистики	Взаимоотношения математической статистики с теорией вероятностей. Математическая статистика и анализ данных. Генеральная совокупность, выборка из нее. Основные способы организации выборки. Вариационный ряд, статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения, гистограмма, полигон частот. Примеры, поясняющие каждое определение и понятие.
8	Статистическая оценка	Статистические оценки параметров распределения:

	параметров распределения	состоятельные и несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии. Точные распределения некоторых выборочных характеристик: распределение $\chi^2$ ; распределение $t$ (Стьюдента). Оценка параметров по малым выборкам: понятие доверительного интервала; доверительный интервал для центра нормального распределения при известном и неизвестном $\sigma$ ; доверительный интервал для $\sigma$ ; доверительный интервал для вероятности; доверительные интервалы в случае асимптотически нормальных оценок.
9	Статистическая гипотеза	Статистические гипотезы и их прикладное назначение. Общая задача проверки гипотез. Критическая область и область принятия гипотезы. Статистическая проверка гипотез о законе распределения: критерий согласия $\chi^2$ (критерий Пирсона).

#### 4. Образовательные технологии

Для проведения учебных занятий по дисциплине используются различные образовательные технологии. Для организации учебного процесса может быть использовано электронное обучение и (или) дистанционные образовательные технологии.

#### 5. Оценка планируемых результатов обучения

##### 5.1 Система оценивания

Форма контроля	Макс. количество баллов	
	За одну работу	Всего
Текущий контроль:		
- устный блиц-опрос и участие в дискуссии на семинаре	2,5 балла	10 баллов
- контрольная работа	20 баллов	20 баллов
- задание 1	10 баллов	10 баллов
- задание 2	10 баллов	10 баллов
- задание 3	10 баллов	10 баллов
Промежуточная аттестация (зачет с оценкой)		40 баллов
Итого за семестр (дисциплину) Зачет с оценкой		100 баллов

Полученный совокупный результат конвертируется в традиционную шкалу оценок и в шкалу оценок Европейской системы переноса и накопления кредитов (European Credit Transfer System; далее – ECTS) в соответствии с таблицей:

100-балльная шкала	Традиционная шкала	Шкала ECTS
95 – 100	отлично	A

83 – 94		зачтено	B
68 – 82	хорошо		C
56 – 67	удовлетворительно		D
50 – 55			E
20 – 49	неудовлетворительно	не зачтено	FX
0 – 19			F

## 5.2 Критерии выставления оценки по дисциплине

Баллы/ Шкала ECTS	Оценка по дисциплине	Критерии оценки результатов обучения по дисциплине
100-83/ A,B	отлично/ зачтено	<p>Выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил теоретический и практический материал, может продемонстрировать это на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся исчерпывающе и логически стройно излагает учебный материал, умеет увязывать теорию с практикой, справляется с решением задач профессиональной направленности высокого уровня сложности, правильно обосновывает принятые решения.</p> <p>Свободно ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «высокий».</p>
82-68/ C	хорошо/ зачтено	<p>Выставляется обучающемуся, если он знает теоретический и практический материал, грамотно и по существу излагает его на занятиях и в ходе промежуточной аттестации, не допуская существенных неточностей.</p> <p>Обучающийся правильно применяет теоретические положения при решении практических задач профессиональной направленности разного уровня сложности, владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Достаточно хорошо ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «хороший».</p>
67-50/ D,E	удовлетво- рительно/ зачтено	<p>Выставляется обучающемуся, если он знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает отдельные ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает определённые затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, владеет необходимыми для этого базовыми навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует достаточный уровень знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «достаточный».</p>
49-0/ F,FX	неудовлет- ворительно/ не зачтено	<p>Выставляется обучающемуся, если он не знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает грубые ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает серьёзные затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, не владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует фрагментарные знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции на уровне «достаточный», закреплённые за дисциплиной, не сформированы.</p>



### 5.3 Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

При оценивании устного блиц-опроса и участия в дискуссии на практическом занятии учитываются:

- степень раскрытия темы выступления (0-2,5 баллов);
- знание содержания обсуждаемых проблем, умение использовать ранее изученный теоретический материал и терминологию научных исследований (0-2 балла).

При оценке контрольной работы учитывается:

- полнота и правильность решения задания (0-2 балла) (для заданий 1,2,3,4);
- полнота и правильность решения задания (0-3 балла) (для заданий 5,6,7,8);

При оценке заданий 1,2,3 на основе компьютерных технологий учитывается:

- полнота и точность выполненной работы (0-4 балла);
- оформление работы (0-2 балла);
- полнота и точность ответов на контрольные вопросы (0-4 балла).

Промежуточная аттестация (зачет с оценкой)

При проведении промежуточной аттестации студент должен ответить на 2 вопроса (теоретического и практического характера).

При оценивании ответа на вопрос теоретического характера учитывается:

- теоретическое содержание освоено не полностью, знание материала носит фрагментарный характер, имеются явные ошибки в ответе (до 5 баллов);
- теоретическое содержание освоено частично, допущено не более двух-трех недочетов (до 10 баллов);
- теоретическое содержание освоено почти полностью, допущено не более одного-двух недочетов (до 15 баллов);
- теоретическое содержание освоено полностью, (20 баллов).

При оценивании ответа на вопрос практического характера учитывается:

- ответ содержит менее 30% правильного решения (0-5 баллов);
- ответ содержит 31-79 % правильного решения (6-15 баллов);
- ответ содержит 80% и более правильного решения (15- 20 баллов).

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности.

Контрольная и задания на основе компьютерных технологий (текущий контроль) содержат типовые задания по ключевым практическим аспектам укрупненных тематик дисциплины и проводятся в течение семестра после их изучения. Итоговые контрольные работы (промежуточный контроль) содержат теоретические вопросы курса, базовые понятия, теоремы и практические задания, не включенные в текущий контроль успеваемости, по укрупненным тематическим разделам. Каждый студент получает индивидуальный вариант работы.

#### *Оценочные средства для текущего контроля успеваемости*

##### **Тема 1. Основные понятия теории вероятностей**

Вопросы для дискуссии:

1. Понятие события.
2. Случайные события как подмножества множества простейших исходов.
3. Вероятность события (классическое определение вероятности).
4. Частота события, статистическая вероятность.
5. Перестановки, размещения, сочетания.
6. Правила суммы и произведения.

## 7. Нахождение вероятности в случаях симметрии исходов опыта.

## Практические задания

- 1.1. Один раз подбрасывается игральная кость. Построить пространство элементарных исходов. Описать события:  
 $A_1$  - появление не более 2-х очков;  
 $A_2$  - появление 3-х или 4-х очков;  
 $A_3$  - появление не менее 5 очков;  
 $A_4$  - появление четного количества очков.  
 Есть ли среди этих событий равновозможные? Указать, какие из этих событий несовместны, какие совместны, какие образуют полную группу? Определить вероятности указанных событий.
- 1.2. Подбрасываются две монеты. Построить пространство элементарных исходов. На данном пространстве описать события, которые были бы: а) совместны, б) несовместны, в) противоположны, г) образовывали бы полную группу. Определить вероятности указанных событий.
- 1.3. Производится один выстрел по мишени. Построить пространство элементарных исходов. На данном пространстве описать события, которые были бы: а) совместны, б) несовместны, в) противоположны, г) образовывали бы полную группу. Определить вероятности указанных событий.
2. Элементы комбинаторики. Непосредственный расчет вероятностей.
- 2.1. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Какова вероятность правильно набрать номер?
- 2.2. Из трех бухгалтеров, восьми менеджеров шести научных сотрудников необходимо случайным отбором сформировать комитет из десяти человек. Какова вероятность того, что в комитете окажутся: один бухгалтер, пять менеджеров и четверо научных сотрудников?
- 2.3. Каждую пятницу бронированный автомобиль доставляет заработную плату из местного отделения банка в пять фирм. В качестве меры предосторожности стараются использовать различные маршруты. Водитель выбирает из предложенных диспетчером вариантов. Какова вероятность того, что нынешний маршрут не повторит предыдущий? Какова вероятность того, что маршрут не повторится ни разу в течение месяца?
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

**Тема 2. Основные теоремы теории вероятностей**

## Вопросы для дискуссии:

1. Сумма событий.
2. Произведение событий.
3. Условная вероятность.
4. Теорема сложения и её следствия.
5. Теорема умножения и её следствия.
6. Полная группа событий (гипотез).
7. Вероятностная оценка гипотез (априорные вероятности).
8. Формула полной вероятности.
9. Теорема Байеса.
10. Дерево решений.
11. Последовательность случайных испытаний.
12. Формула Бернулли.

## Практические задания

- 3.1. При проверке документа можно обнаружить четыре нарушения в его оформлении. Рассматриваются события:  $A$  - обнаружено ровно одно нарушение;  $B$  - обнаружено хотя бы одно нарушение;  $C$  - обнаружено не менее 2-х нарушений;  $D$  - обнаружено ровно два нарушения;  $E$  - обнаружено ровно 3 нарушения;  $F$  - обнаружены все нарушения. Указать в чем состоят события:
- 3.2. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 2 учебника. Найти вероятность того, что: а) первый учебник будет в переплете (событие  $A$ ); б) второй учебник будет в переплете (событие  $B$ ); в) два учебника будут в переплете (событие  $C$ ); г) хотя бы один учебник будет в переплете (событие  $D$ ).
- 3.3. В ящике имеется 10 одинаковых деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает деталь, записывает цвет и возвращает деталь в ящик. Найти вероятность того, что три извлеченные детали окажутся окрашенными.
- 3.4. Из колоды в 52 карты наудачу извлекается 3 карты. Какова вероятность, что три карты красной масти, если среди них два туза.
- 3.5. Студент, разыскивая нужную ему книгу, решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в ее фондах книга или нет. Если книга есть, то одинаково вероятно выдана она читателю или свободна. Найти вероятность того, что студент получит книгу.

#### 4. Формула полной вероятности. Теорема Байеса. Формула Бернулли

- 4.1. Фирма собирается выпускать новый товар на рынок. Подсчитано, что вероятность хорошего сбыта продукции равна 0,6; плохого - 0,4. Компания собирается провести маркетинговое исследование, вероятность правильности которого 0,8. Как изменятся первоначальные вероятности уровня реализации, если это исследование предскажет плохой сбыт?
- 4.2. В спартакиаде участвуют из первой группы 4 студента, из второй - 6, из третьей - 5. Студент из первой группы попадает в сборную института с вероятностью 0,9, второй - 0,7, третьей - 0,8. Наудачу выбранный студент попал в сборную. Какова вероятность того, что это студент из второй группы.
- 4.3. Проводится серия испытаний прибора, который при каждом испытании ломается с постоянной вероятностью  $p$ . После первой поломки прибор ремонтируют, после второй признают негодным. Найти вероятность того, что:
  - а) прибор не будет признан негодным после пяти испытаний;
  - б) прибор будет признан негодным на седьмом испытании.

### Тема 3. Случайные величины, способы их задания и числовые характеристики

#### Вопросы для дискуссии:

1. Понятие дискретной случайной величины.
2. Ряд распределения, многоугольник распределения.
3. Функция распределения.
4. Понятие непрерывной случайной величины.
5. Функция распределения.
6. Плотность распределения.
7. Математическое ожидание и его свойства.
8. Дисперсия и его свойства.
9. Среднее квадратическое отклонение.

#### Практические задания

- 1.1. Производится один опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие  $A$ ; вероятность события  $A$  равна  $p$ . Рассматривается случайная величина  $X$ , равная единице, если событие  $A$  произошло, и нулю, если не произошло (число

появлений события  $A$  в данном опыте). Построить ряд распределения случайной величины  $X$  и ее функцию распределения.

1.2. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попаданий в мишень для первого стрелка  $p_1$  для второго  $p_2$ . Рассматриваются две случайные величины:

$X_1$  — число попаданий первого стрелка;

$X_2$  — число попаданий второго стрелка и их разность  $Z = X_1 - X_2$ .

Построить ряд распределений случайной величины  $Z$  и ее функцию распределения.

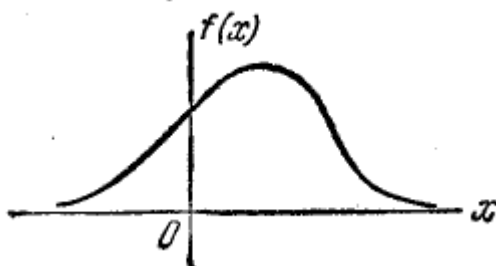
1.3. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Построить ряд распределения числа попаданий в корзину.

1.4. В архиве разыскиваются три документа. Вероятность наличия первого документа в архиве 0,7, вероятность наличия второго документа в архиве 0,8, вероятность наличия третьего документа в архиве 0,6. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины  $X$ -числа найденных документов.

2. Непрерывные случайные величины. Способы задания непрерывных случайных величин.

2.1. Рассматривая неслучайную величину  $a$  как частный вид случайной, построить для нее функцию распределения.

2.2. Дан график плотности распределения  $f(x)$  случайной величины  $X$ . Как изменится этот график, если: а) прибавить к случайной величине 1; б) вычесть из случайной величины 2; в) умножить случайную величину на 2; г) изменить знак величины на обратный?



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

2.3. Случайная величина  $X$  задана функцией распределения

Найти: а) плотность распределения, б) вероятность попадания в интервал  $[1; 2,5)$ .

2.4. Плотность вероятности непрерывной случайной величины задана в виде  $f(x) = C \sin 4x$  на интервале  $(0, \pi/4)$ . Найти параметр  $C$ .

3. Числовые характеристики случайных величин.

3.1. К случайной величине  $X$  прибавили постоянную, не случайную величину  $a$ . Как от этого изменятся ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение.

3.2. Случайную величину  $X$  умножили на  $a$ . Как от этого изменятся ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение?

3.3. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$  (практические задания 5.1, 5.2).

3.4. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$  (практические задания 6.1, 6.3).

#### Тема 4. Основные законы распределения случайных величин

Вопросы для дискуссии:

1. Формула Бернулли.
2. Биномиальный закон распределения.
3. Распределение Пуассона.

4. Предельный переход биномиального закона в закон Пуассона.
5. Равномерное распределение.
6. Нормальный закон распределения.
7. Предельный переход биномиального закона в нормальный закон распределения.

#### Практические задания

1.1 В библиотеке имеются книги только по технике и математике. Вероятность того, что любой читатель возьмет книгу по технике - 0.7, по математике - 0.3. Определить вероятность того, что из пяти читателей книгу по математике возьмут не менее трех, если каждый читатель берет только одну книгу.

1.2. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 15 секунд испускало в среднем 7.5  $\alpha$ -частиц. Найти вероятность того, что за 2 секунды это вещество испустит хотя бы одну  $\alpha$ -частицу.

1.3. Производители карманных калькуляторов знают из опыта, что 1% произведенных и проданных калькуляторов имеют дефекты и их должны заменить по гарантии. Большая аудиторская фирма купила 500 калькуляторов. Какова вероятность, что три или больше калькуляторов придется заменить?

#### 2. Основные законы непрерывных случайных величин.

2.1 Время ожидания поезда метро 0 – 2 мин. Любое время ожидания поезда в этих пределах равновероятно. Подсчитать вероятность того, что в очередной раз придется ждать от 1,25 до 1,75 минут. Сколько в среднем уходит на ожидание поезда метро за 30 дней у человека, пользующегося метро 2 раза в день?

2.2 Ошибка прогноза температуры воздуха, есть случайная величина с  $m = 0$ ,  $\sigma = 2$ . Найти вероятность того, что в течение недели ошибка прогноза трижды превысит по абсолютной величине 4.

2.3. В кафе самообслуживания 90 мест. Его обслуживают 3 кассы. Найти вероятность того, что в одну из касс выстроится очередь более чем из 35 человек.

### Тема 5. Системы случайных величин

#### Вопросы для дискуссии:

1. Ряд распределения системы случайных величин.
2. Ковариация и коэффициент корреляции, как характеристики корреляционной связи.
3. Уравнение линейной регрессии.

#### Практические задания

1.1. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины найти уравнение линейной регрессии  $Y$  на  $X$ .

$X \backslash Y$	1	2	4
1	0,05	0.12	0.08
3	0,11	0,10	0.20
5	0,20	0,08	0.06

1.2. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины найти уравнение линейной регрессии.

$X \backslash Y$	1	4
3	0,12	0.20
5	0,24	0,15
6	0,22	0,07

#### 2. Законы больших чисел.

**Тема 6. Закон больших чисел**

Вопросы для дискуссии:

Неравенство Чебышева.

2. Теоремы Чебышева, Бернулли, Ляпунова.

3. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

**Практические задания для домашней работы**

2.1. Вероятность случайного события А при одном испытании 0.7. Сколько раз нужно повторить испытание, чтобы с вероятностью 0.9 частота появления в этой серии события А будет отклоняться от его вероятности в одном испытании не более чем на 0.05?

2.2. Дисперсия каждой из 400 независимых случайных величин равна 25. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения средней арифметической от средней арифметической их математического ожидания не превысит 0.5  $P(|\bar{x} - m_{\bar{x}}| < 0.5) = ?$

2.3. Вероятность успешного запуска ракеты равна 0.75. Найти вероятность того, что из 10 запусков 8 будут успешными  $P_{10}(8 - \text{успешных}) = ?$

2.4. На предприятии, выпускающем кинескопы, 0.8 всей продукции выдерживает гарантийный срок. С вероятностью, превышающей 0.95, найти пределы, в которых находится доля кинескопов, выдерживающей гарантийный срок, из 8000 кинескопов.

**Контрольная работа**

Содержание: решение задач по темам № 1–5. Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание № 1. Комбинаторика. Классическая формула определения вероятности. Максимальная оценка: 2 балла.

Задание № 2. Теорема сложения и ее следствия. Максимальная оценка: 2 балла.

Задание № 3. Теорема умножения и ее следствия. Максимальная оценка: 2 балла.

Задание № 4. Формула полной вероятности. Теорема Байеса. Максимальная оценка: 2 балла.

Задание № 5. Способы задания случайных величин: ряд распределения, функция распределения, плотность распределения. Максимальная оценка: 3 балла.

Задание № 6. Основные законы распределения дискретных случайных величин (биномиальный закон распределения, закон распределения Пуассона.) Максимальная оценка: 3 балла.

Задание № 7. Основные законы распределения непрерывных случайных величин (нормальный закон распределения, закон равномерной плотности.) Максимальная оценка: 3 балла.

Задание № 8. Система двух случайных величин. Максимальная оценка: 3 балла.

**Типовой вариант**

1. Каждую пятницу бронированный автомобиль доставляет заработную плату из местного отделения банка в пять фирм. В качестве меры предосторожности стараются использовать различные маршруты. Водитель выбирает из предложенных диспетчером вариантов. Какова вероятность того, что нынешний маршрут не повторит предыдущий? Какова вероятность того, что маршрут не повторится ни разу в течение месяца?
2. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку, равна 0,1, второй - 0,15, третий - 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении будет допущена ошибка хотя бы одним исследователем.
3. Среди десяти документов три оформлены не по стандарту. Документы проверяют один за другим до выявления всех нестандартных. Какова вероятность того, что проверка закончится на 5 документе.

4. Фирма собирается выпускать новый товар на рынок. Подсчитано, что вероятность хорошего сбыта продукции равна 0,6; плохого - 0,4. Компания собирается провести маркетинговое исследование, вероятность правильности которого 0,8. Как изменятся первоначальные вероятности уровня реализации, если это исследование предскажет плохой сбыт?
5. Плотность вероятности непрерывной случайной величины задана в виде  $f(x) = C \sin 4x$  на интервале  $(0, \pi/4)$ . Найти параметр  $C$  и функцию распределения  $F(x)$ .
6. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4, независимо от других магазинов. Найти вероятность того, что число заявок в день не превысит двух. Найти среднее число заявок в день.
7. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих среднюю квадратическую ошибку взвешивания 150 мг. Номинальный вес порохового заряда 2.3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2.5 г.
8. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины найти коэффициент корреляции и построить уравнение линейной регрессии.

X\Y	1	4
3	0,12	0,20
5	0,24	0,15
6	0,22	0,07

### Тема 7. Основные понятия математической статистики

#### Вопросы для опроса:

1. Генеральная совокупность и выборка. Способы формирования выборок.
2. Генеральная средняя, генеральная дисперсия, выборочная средняя, исправленная дисперсия, стандартное отклонение, мода, медиана.
3. Вариационный ряд. Построение статистических таблиц по не сгруппированным и сгруппированным данным.
4. Эмпирическая функция распределения.
5. Полигон частот, гистограмма.

#### Домашнее задание

Время, которое затрачивается работниками справочно-информационного фонда учреждения для обслуживания запросов, является случайной величиной. Можно считать, что в течение дня поступает 500 запросов. Главный менеджер компании решил предпринять выборочную проверку и выбрал 50 запросов из 500, поступивших за день, чтобы иметь представление об общем времени, необходимом для обслуживания всех поступивших запросов. Время (в минутах), истраченное на обслуживание выбранных запросов, следующее:  
10; 20; 30; 18; 20; 10; 20; 20; 40; 38; 27; 24; 20; 18; 24; 30; 15; 15; 35; 45; 35; 18; 15; 24; 18; 15; 38; 30; 24; 20; 20; 18; 10; 15; 18; 10; 20; 24; 27; 15; 20; 18; 27; 35; 20; 15; 18; 20; 27; 20.

Используя функции, вычислите:

- \* минимальное значение данных наблюдений;
- \* максимальное значение данных наблюдений;
- \* выборочную среднюю;
  - \*1 моду;
  - \*2 медиану;
  - \*3 исправленную дисперсию;
  - \*4 стандартное отклонение.

Постройте диаграмму, на которой показаны значения случайной величины и их относительные частоты.

На основе выборки найдите оценку общего времени, необходимого для обслуживания всех запросов.

Сколько сотрудников должно работать в справочно-информационной службе?

### Тема 8. Статистическая оценка параметров распределения

#### Вопросы для опроса:

1. Доверительный интервал, доверительная вероятность.
2. Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии.
3. Распределение Стьюдента. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии.
4. Распределение  $\chi^2$ . Доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратического отклонения.
5. Доверительный интервал для вероятности.

#### Практические задания для домашней работы

1. Перед постом ГАИ висит знак, ограничивающий скорость движения 50 км/час. Была зарегистрирована скорость случайно выбранных 40 машин, проезжающих мимо поста ГАИ:

49	83	58	65	68	60	76	86	74	53
71	74	65	72	64	42	62	62	58	82
78	64	55	87	56	50	71	58	57	75
58	86	64	56	45	73	54	86	70	73

Постройте 90%, 95% и 97% доверительные интервалы для средней скорости машин. Какой вывод можно сделать, основываясь на этих данных? (ОПК-5, ПК-25)

2. Спортивный клуб проводит курс оздоровительных мероприятий для своих членов. Чтобы определить эффективность выбранных процедур оздоровления, был измерен вес 10 случайно выбранных членов клуба до проведения мероприятий по оздоровлению, и 10 других - после. Результаты приведены в таблице:

До	68	65	66	66	67	66	66	64	69	63
После	65	62	64	65	65	64	59	63	65	68

Постройте 90%, 95% и 97% доверительные интервалы для:

среднего веса членов клуба перед курсом;

среднего веса членов клуба после курса;

Какой вывод можно сделать об эффективности курса? (ОПК-5, ПК-25)

3. Случайная выборка 800 домохозяек в центре города, проведенная утром, показала, что 480 из них хотели бы, чтобы торговый центр города был свободен от транспорта. Определите доверительные пределы с вероятностью 90% от доли всех домохозяек в городе, кто хотел бы, чтобы торговый центр был свободен от транспорта.

Мисс Сэлли Бриггс работает менеджером по продаже кондитерских изделий. При изучении случайной выборки 200 выпусков в Уэльсе она обнаружила, что для 50 из них желательно изменение ассортимента продукции.

Требуется:

- Найти 95%-ный доверительный интервал для доли потребителей в Уэльсе, для которых желательно изменение ассортимента.
- Мисс Бриггс собирается провести такое же обследование в Шотландии и решила достичь оценки доли потребителей новой продукции в пределах  $\pm 4\%$ . Насколько большей должна быть выборка в Шотландии!?"? Предполагается, что она определяет доверительный



интервал с вероятностью 95%.

### Тема 9. Статистическая гипотеза

Вопросы для опроса:

1. Статистические гипотезы и их прикладное назначение.
2. Критическая область и область принятия решения.
3. Ошибки первого и второго рода.
4. Распределение  $\chi^2$ . Критерий Пирсона.
5. Эмпирические и теоретические частоты.
6. Построение таблицы для проверки гипотезы о нормальном законе распределения генеральной совокупности.
7. Построение таблицы для проверки гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.
8. Построение таблицы для проверки гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности.

Практические задания для домашней работы

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности  $X$  с заданным эмпирическим распределением.

Номер интервала $i$	Граница интервала		Частота $m_i$
	$x_i$	$x_{i+1}$	
1	-20	-10	20
2	-10	0	47
3	0	10	80
4	10	20	89
5	20	30	30
6	30	40	40
7	40	50	50

2. В течение 10 часов регистрировали прибытие автомашин к бензоколонке и получили эмпирическое распределение, приведенное в таблице (в первом столбце указан интервал времени в часах, во втором столбце – частота, т.е. количество машин, прибывших в этом интервале). Всего было зарегистрировано 200 машин. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что время прибытия машин распределено равномерно.

$x_{i-1} - x_i$	$m_i$
8-9	12
9-10	40
10-11	22
11-12	16
12-13	28
13-14	6
14-15	11
15-16	33
16-17	18
17-18	14

3. В итоге проверки на нестандартность 200 ящиков консервов получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество  $x_i$  нестандартных коробок консервов в одном ящике; во второй строке – частота  $m_i$ , т.е. число ящиков содержащих  $x_i$  коробок нестандартных консервов). Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина  $X$  – число нестандартных коробок – распределена по закону Пуассона.

$x_i$	0	1	2	3	4
$m_i$	132	43	20	3	2

*Фонды оценочных средств для промежуточной аттестации обучающихся*  
(ОПК-2.1)

1. Вероятность как частота события. Классическая вероятностная модель. Аксиомы теории вероятностей
2. Сумма событий. Совместные и несовместные события. Теорема сложения для классической модели. Следствия теоремы сложения.
3. Произведение событий. Зависимые и независимые события. Понятие условной вероятности. Теорема умножения для классической модели. Следствия теоремы умножения.
4. Формула полной вероятности.
5. Теорема Байеса.
6. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
7. Случайные величины, их виды и примеры.
8. Функция распределения как универсальная характеристика случайных величин и ее свойства.
9. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.
10. Математическое ожидание случайной величины, мода, медиана.
11. Свойства математического ожидания.
12. Дисперсия случайной величины, среднее квадратическое отклонение.
13. Свойства дисперсии.
14. Равномерное распределение случайной величины и его параметры.
15. Биномиальное распределение случайной величины и его параметры.
16. Распределение Пуассона и его параметры.

(ОПК-2.2)

17. Нормальное распределение случайной величины и его параметры.
18. Закон распределения системы двух случайных величин.
19. Функция распределения системы двух случайных величин.
20. Условные законы распределения системы двух случайных величин.
21. Числовые характеристики системы двух случайных величин.
22. Регрессия и корреляция. Коэффициент корреляции и его свойства.
23. Линейная регрессия.
24. Неравенство Чебышева.
25. Основные предельные теоремы. Центральная предельная теорема.
26. Генеральная совокупность и выборка (основные понятия). Способы организации выборок. Вариационный ряд.
27. Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Гистограмма. Полигон частот.
28. Состоятельные и несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.
29. Состоятельная и несмещенная оценка для вероятности.
30. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.
31. Доверительный интервал для математического ожидания при известном  $\sigma$ .

32. Распределение Стьюдента. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном  $\sigma$ .
33. Распределение  $\chi^2$ . Доверительный интервал для дисперсии.
34. Доверительный интервал для вероятности.
35. Общая задача проверки гипотез. Критическая область и область принятия решений.
36. Проверка гипотез о законе распределения (критерий Пирсона).

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 6.1 Список источников и литературы

#### Литература основная

1. Коган, Е. А.. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е. А. Коган, А. А. Юрченко. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 250 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-014235-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1052969>
2. Павлов, С. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / С.В. Павлов. — Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2022. — 186 с. — (ВО: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-00679-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1709430>

#### Литература дополнительная

1. Пыркина, О. Е. Теория вероятностей и математическая статистика для применения в анализе данных : учебное пособие / О. Е. Пыркина. - Москва : Прометей, 2023. - 582 с. - ISBN 978-5-00172-475-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2144372>

### 6.2 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

Национальная электронная библиотека (НЭБ) [www.rusneb.ru](http://www.rusneb.ru)  
**ELibrary.ru** Научная электронная библиотека [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)  
 Электронная библиотека Grebennikon.ru [www.grebennikon.ru](http://www.grebennikon.ru)  
 Cambridge University Press  
 ProQuest Dissertation & Theses Global  
 SAGE Journals  
 Taylor and Francis  
 JSTOR  
 Консультант Плюс  
 Гарант

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения аудиторных занятий по дисциплине необходима аудитория, оснащенная ПК и мультимедиа-проектором.

Состав программного обеспечения:

1. Windows
2. Microsoft Office

## 8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- для слепых и слабовидящих: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или могут быть заменены устным ответом; обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств; письменные задания оформляются увеличенным шрифтом; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

- для глухих и слабослышащих: лекции оформляются в виде электронного документа, либо предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования; письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме; экзамен и зачёт проводятся в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.

- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения предусматривается использование технических средств, необходимых в связи с индивидуальными особенностями обучающихся. Эти средства могут быть предоставлены университетом, или могут использоваться собственные технические средства.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- для слепых и слабовидящих: в печатной форме увеличенным шрифтом, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.

- для глухих и слабослышащих: в печатной форме, в форме электронного документа.

- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.

Учебные аудитории для всех видов контактной и самостоятельной работы, научная библиотека и иные помещения для обучения оснащены специальным оборудованием и учебными местами с техническими средствами обучения:

- для слепых и слабовидящих: устройством для сканирования и чтения с камерой SARA SE; дисплеем Брайля PAC Mate 20; принтером Брайля EmBraille ViewPlus;

- для глухих и слабослышащих: автоматизированным рабочим местом для людей с нарушением слуха и слабослышащих; акустический усилитель и колонки;

- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: передвижными, регулируемые эргономическими партами СИ-1; компьютерной техникой со специальным программным обеспечением.

## **9. Методические материалы**

### **9.1 Планы семинарских/ практических/ лабораторных занятий**

#### **Практическое занятие 1**

Тема 1 Предмет теории вероятностей. Случайные события. Алгебра событий. Определение вероятности. Элементы комбинаторики. Непосредственный расчет вероятностей.

Тема 2 Теорема сложения и следствия из нее. Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения и следствия из нее.

Система гипотез. Формула полной вероятности и теорема Байеса. Принятие решений: байесовский подход.

Повторение испытаний. Формула Бернулли.

#### Вопросы для обсуждения

1. Понятие события.
2. Случайные события как подмножества множества простейших исходов.
3. Вероятность события (классическое определение вероятности).
4. Частота события, статистическая вероятность.
5. Перестановки, размещения, сочетания.
6. Правила суммы и произведения.
7. Нахождение вероятности в случаях симметрии исходов опыта.

#### Вопросы для обсуждения

1. Сумма событий.
2. Произведение событий.
3. Условная вероятность.
4. Теорема сложения и её следствия.
5. Теорема умножения и её следствия.
6. Вероятностная оценка гипотез (априорные вероятности).
7. Формула полной вероятности.
8. Теорема Байеса.
9. Полная группа событий (гипотез).
10. Дерево решений.
11. Последовательность случайных испытаний.
12. Формула Бернулли.

### **Практическое занятие 2**

Тема 3. Дискретные случайные величины. Способы задания дискретных случайных величин. Непрерывные случайные величины. Способы задания непрерывных случайных величин. Числовые характеристики случайных величин.

#### Вопросы для обсуждения

1. Понятие дискретной случайной величины.
2. Ряд распределения, многоугольник распределения.
3. Функция распределения.
4. Понятие непрерывной случайной величины.
5. Функция распределения.
6. Плотность распределения.
7. Математическое ожидание и его свойства.
8. Дисперсия и его свойства.
9. Среднее квадратическое отклонение.

### **Практическое занятие 3**

Тема 4. Основные законы дискретных случайных величин. Основные законы непрерывных случайных величин.

#### Вопросы для обсуждения

1. Формула Бернулли.
2. Биномиальный закон распределения.
3. Распределение Пуассона.
4. Предельный переход биномиального закона в закон Пуассона.
5. Равномерное распределение.
6. Нормальный закон распределения.
7. Предельный переход биномиального закона в нормальный закон распределения.

#### **Практическое занятие 4**

Тема 5. Система двух случайных величин.

Тема 6. Закон больших чисел.

##### Вопросы для обсуждения

1. Ряд распределения системы случайных величин.
2. Ковариация и коэффициент корреляции, как характеристики корреляционной связи.
3. Уравнение линейной регрессии.
4. Неравенство Чебышева.
5. Теоремы Чебышева, Бернулли, Ляпунова.
6. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Контрольная работа

См. типовой вариант

Рекомендуемая литература: конспект лекций, литература к семинарам №1-№4.

#### **Практическое занятие 5.** Первичная обработка статистических данных

Темы 7-8. Основные понятия математической статистики. Точечные оценки числовых параметров.

Цель практического занятия – освоить методы сбора статистических данных и формирования выборок. На примере конкретной задачи разобрать методику первичной обработки и анализа статистических данных.

В результате выполнения работы студент должен научиться строить статистические таблицы, графически представлять выборочные данные, рассчитывать точечные оценки числовых характеристик исследуемой случайной величины. Освоить применение электронных таблиц Excel для проведения статистических расчетов.

Вопросы для обсуждения:

1. Генеральная совокупность и выборка. Способы формирования выборок.
2. Генеральная средняя, генеральная дисперсия, выборочная средняя, исправленная дисперсия, стандартное отклонение, мода, медиана.
3. Вариационный ряд. Построение статистических таблиц по не сгруппированным и сгруппированным данным.
4. Эмпирическая функция распределения.
5. Полигон частот, гистограмма.

#### **Практическое занятие 6.** Интервальные оценки

Тема 8. Статистическая оценка параметров распределения

Цель практического занятия – освоить методы построения доверительных интервалов для числовых характеристик случайной величины и вероятностей случайных событий.

В результате выполнения работы студент должен научиться рассчитывать доверительные интервалы для математического ожидания, дисперсии и вероятности; уметь определять необходимый объем выборки, обеспечивающей заданную надежность и точность оценки; провести анализ полученных результатов и сделать необходимые выводы.

Вопросы для обсуждения.

1. Доверительный интервал, доверительная вероятность.
2. Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии.
3. Распределение Стьюдента.
4. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии.
5. Распределение  $\chi^2$ .
6. Доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратического отклонения.
7. Доверительный интервал для вероятности.

### **Практическое занятие 7. Статистическая гипотеза**

Тема 9. Статистическая гипотеза.

Количество часов – 4 часа.

Цель практического занятия – освоить технику проверки гипотезы о виде закона распределения генеральной совокупности, используя критерий Пирсона.

В результате выполнения работы студент должен научиться применять критерий Пирсона для проверки гипотез о нормальном законе распределения генеральной совокупности, законе распределения Пуассона и равномерном законе распределения. Уметь строить статистические таблицы в программной среде Excel для проведения необходимых расчетов и делать выводы по полученным результатам.

Вопросы для обсуждения:

1. Статистические гипотезы и их прикладное назначение.
2. Критическая область и область принятия решения.
3. Ошибки первого и второго рода.
4. Распределение  $\chi^2$ . Критерий Пирсона.
5. Эмпирические и теоретические частоты.
6. Построение таблицы для проверки гипотезы о нормальном законе распределения генеральной совокупности.
7. Построение таблицы для проверки гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.
8. Построение таблицы для проверки гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности.

Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины

В данном разделе приведены задания, с помощью которых закрепляются теоретические положения курса и навыки решения типовых задач.

### **Практическое занятие 1**

1. Предмет теории вероятностей. Случайные события. Алгебра событий. Определение вероятности

Теоретические вопросы

8. Понятие события.
9. Случайные события как подмножества множества простейших исходов.
10. Вероятность события (классическое определение вероятности).
11. Частота события, статистическая вероятность.

Практические задания

1.4. Один раз подбрасывается игральная кость. Построить пространство элементарных исходов. Описать события:

$A_1$  - появление не более 2-х очков;

$A_2$  - появление 3-х или 4-х очков;

$A_3$  - появление не менее 5 очков;

$A_4$  - появление четного количества очков.

Есть ли среди этих событий равновозможные? Указать, какие из этих событий несовместны, какие совместны, какие образуют полную группу? Определить вероятности указанных событий.

- 1.5. Подбрасываются две монеты. Построить пространство элементарных исходов. На данном пространстве описать события, которые были бы: а) совместны, б) несовместны, в) противоположны, г) образовывали бы полную группу. Определить вероятности указанных событий.
- 1.6. Производится один выстрел по мишени. Построить пространство элементарных исходов. На данном пространстве описать события, которые были бы: а) совместны, б) несовместны, в) противоположны, г) образовывали бы полную группу. Определить вероятности указанных событий.

4. Элементы комбинаторики. Непосредственный расчет вероятностей.

#### Теоретические вопросы

1. Перестановки, размещения, сочетания.
2. Правила суммы и произведения.
3. Нахождение вероятности в случаях симметрии исходов опыта.

#### Практические задания

- 2.4. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Какова вероятность правильно набрать номер?
  - 2.5. Из трех бухгалтеров, восьми менеджеров шести научных сотрудников необходимо случайным отбором сформировать комитет из десяти человек. Какова вероятность того, что в комитете окажутся: один бухгалтер, пять менеджеров и четверо научных сотрудников?
  - 2.6. Каждую пятницу бронированный автомобиль доставляет заработную плату из местного отделения банка в пять фирм. В качестве меры предосторожности стараются использовать различные маршруты. Водитель выбирает из предложенных диспетчером вариантов. Какова вероятность того, что нынешний маршрут не повторит предыдущий? Какова вероятность того, что маршрут не повторится ни разу в течение месяца?
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

#### Теоретические вопросы

13. Сумма событий.
14. Произведение событий.
15. Условная вероятность.
16. Теорема сложения и её следствия.
17. Теорема умножения и её следствия.

#### Практические задания

- 3.6. При проверке документа можно обнаружить четыре нарушения в его оформлении. Рассматриваются события:  $A$  - обнаружено ровно одно нарушение;  $B$  - обнаружено хотя бы одно нарушение;  $C$  - обнаружено не менее 2-х нарушений;  $D$  - обнаружено ровно два нарушения;  $E$  - обнаружено ровно 3 нарушения;  $F$  - обнаружены все нарушения. Указать в чем состоят события:
- 3.7. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 2 учебника. Найти вероятность того, что: а) первый учебник будет в переплете (событие  $A$ ); б) второй учебник будет в переплете (событие  $B$ ); в) два учебника будут в переплете (событие  $C$ ); г) хотя бы один учебник будет в переплете (событие  $D$ ).



- 3.8. В ящике имеется 10 одинаковых деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает деталь, записывает цвет и возвращает деталь в ящик. Найти вероятность того, что три извлеченные детали окажутся окрашенными.
- 3.9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекается 3 карты. Какова вероятность, что три карты красной масти, если среди них два туза.
- 3.10. Студент, разыскивая нужную ему книгу, решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в ее фондах книга или нет. Если книга есть, то одинаково вероятно выдана она читателю или свободна. Найти вероятность того, что студент получит книгу.

#### 4. Формула полной вероятности. Теорема Байеса. Формула Бернулли

##### Теоретические вопросы

1. Полная группа событий (гипотез).
2. Вероятностная оценка гипотез (априорные вероятности).
3. Формула полной вероятности.
4. Теорема Байеса.
5. Дерево решений.
6. Последовательность случайных испытаний.
7. Формула Бернулли.

##### Практические задания

- 4.4. Фирма собирается выпускать новый товар на рынок. Подсчитано, что вероятность хорошего сбыта продукции равна 0,6; плохого - 0,4. Компания собирается провести маркетинговое исследование, вероятность правильности которого 0,8. Как изменятся первоначальные вероятности уровня реализации, если это исследование предскажет плохой сбыт?
- 4.5. В спартакиаде участвуют из первой группы 4 студента, из второй - 6, из третьей - 5. Студент из первой группы попадает в сборную института с вероятностью 0,9, второй - 0,7, третьей - 0,8. Наудачу выбранный студент попал в сборную. Какова вероятность того, что это студент из второй группы.
- 4.6. Проводится серия испытаний прибора, который при каждом испытании ломается с постоянной вероятностью  $p$ . После первой поломки прибор ремонтируют, после второй признают негодным. Найти вероятность того, что:
- а) прибор не будет признан негодным после пяти испытаний;
  - б) прибор будет признан негодным на седьмом испытании.

### **Практическое занятие 2**

1. Дискретные случайные величины. Способы задания дискретных случайных величин.

##### Теоретические вопросы

10. Понятие дискретной случайной величины.
11. Ряд распределения, многоугольник распределения.
12. Функция распределения.

##### Практические задания

- 1.5. Производится один опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие  $A$ ; вероятность события  $A$  равна  $p$ . Рассматривается случайная величина  $X$ , равная единице, если событие  $A$  произошло, и нулю, если не произошло (число появлений события  $A$  в данном опыте). Построить ряд распределения случайной величины  $X$  и ее функцию распределения.

1.6. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попаданий в мишень для первого стрелка  $p_1$  для второго  $p_2$ . Рассматриваются две случайные величины:

$X_1$  — число попаданий первого стрелка;

$X_2$  — число попаданий второго стрелка и их разность  $Z = X_1 - X_2$ .

Построить ряд распределений случайной величины  $Z$  и ее функцию распределения.

1.7. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Построить ряд распределения числа попаданий в корзину.

1.8. В архиве разыскиваются три документа. Вероятность наличия первого документа в архиве 0,7, вероятность наличия второго документа в архиве 0,8, вероятность наличия третьего документа в архиве 0,6. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины  $X$ -числа найденных документов.

2. Непрерывные случайные величины. Способы задания непрерывных случайных величин.

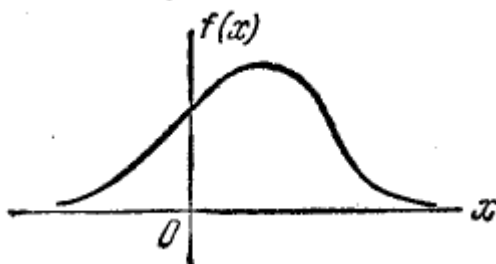
#### Теоретические вопросы

5. Понятие непрерывной случайной величины.
6. Функция распределения.
7. Плотность распределения.

#### Практические задания

7.1. Рассматривая неслучайную величину  $a$  как частный вид случайной, построить для нее функцию распределения.

7.2. Дан график плотности распределения  $f(x)$  случайной величины  $X$ . Как изменится этот график, если: а) прибавить к случайной величине 1; б) вычесть из случайной величины 2; в) умножить случайную величину на 2; г) изменить знак величины на обратный?



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

7.3. Случайная величина  $X$  задана функцией распределения

Найти: а) плотность распределения, б) вероятность попадания в интервал  $[1; 2,5)$ .

7.4. Плотность вероятности непрерывной случайной величины задана в виде  $f(x) = C \sin 4x$

на интервале  $(0, \pi/4)$ . Найти параметр  $C$ .

8. Числовые характеристики случайных величин.

#### Теоретические вопросы

1. Математическое ожидание и его свойства.
2. Дисперсия и его свойства.
3. Среднее квадратическое отклонение.

#### Практические задания

8.1. К случайной величине  $X$  прибавили постоянную, не случайную величину  $a$ . Как от этого изменятся ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение.

8.2. Случайную величину  $X$  умножили на  $a$ . Как от этого изменятся ее характеристики:

1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение?

8.3. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$  (практические задания 5.1, 5.2).

8.4. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$  (практические задания 6.1, 6.3).

### **Практическое занятие 3**

#### 1. Основные законы дискретных случайных величин.

##### Теоретические вопросы

8. Формула Бернулли.
9. Биномиальный закон распределения.
10. Распределение Пуассона.
11. Предельный переход биномиального закона в закон Пуассона.

##### Практические задания

1.2 В библиотеке имеются книги только по технике и математике. Вероятность того, что любой читатель возьмет книгу по технике - 0.7, по математике - 0.3. Определить вероятность того, что из пяти читателей книгу по математике возьмут не менее трех, если каждый читатель берет только одну книгу.

2.2. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 15 секунд испускало в среднем 7.5  $\alpha$ -частиц. Найти вероятность того, что за 2 секунды это вещество испустит хотя бы одну  $\alpha$ -частицу.

2.3. Производители карманных калькуляторов знают из опыта, что 1% произведенных и проданных калькуляторов имеют дефекты и их должны заменить по гарантии. Большая аудиторская фирма купила 500 калькуляторов. Какова вероятность, что три или больше калькуляторов придется заменить?

#### 2. Основные законы непрерывных случайных величин.

##### Теоретические вопросы

1. Равномерное распределение.
2. Нормальный закон распределения.
3. Предельный переход биномиального закона в нормальный закон распределения.

##### Практические задания

2.3 Время ожидания поезда метро 0 – 2 мин. Любое время ожидания поезда в этих пределах равновероятно. Подсчитать вероятность того, что в очередной раз придется ждать от 1,25 до 1,75 минут. Сколько в среднем уходит на ожидание поезда метро за 30 дней у человека, пользующегося метро 2 раза в день?

2.4 Ошибка прогноза температуры воздуха, есть случайная величина с  $m = 0$ ,  $\sigma = 2^\circ$ . Найти вероятность того, что в течение недели ошибка прогноза трижды превысит по абсолютной величине  $4^\circ$ .

2.4. В кафе самообслуживания 90 мест. Его обслуживают 3 кассы. Найти вероятность того, что в одну из касс выстроится очередь более чем из 35 человек.

### **4. Практическое занятие 4**

#### 1. Системы случайных величин.

##### Теоретические вопросы

4. Ряд распределения системы случайных величин.
5. Ковариация и коэффициент корреляции, как характеристики корреляционной связи.
6. Уравнение линейной регрессии.

## Практические задания

1.1. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины найти уравнение линейной регрессии  $Y$  на  $X$ .

$X \setminus Y$	1	2	4
1	0,05	0,12	0,08
3	0,11	0,10	0,20
5	0,20	0,08	0,06

1.2. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины найти уравнение линейной регрессии.

$X \setminus Y$	1	4
3	0,12	0,20
5	0,24	0,15
6	0,22	0,07

3. Законы больших чисел.

## Теоретические вопросы

1. Неравенство Чебышева.
2. Теоремы Чебышева, Бернулли, Ляпунова.
3. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

## Практические задания

2.1. Вероятность случайного события  $A$  при одном испытании 0.7. Сколько раз нужно повторить испытание, чтобы с вероятностью 0.9 частота появления в этой серии события  $A$  будет отклоняться от его вероятности в одном испытании не более чем на 0.05?

2.2. Дисперсия каждой из 400 независимых случайных величин равна 25. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения средней арифметической от средней арифметической их математического ожидания не превысит 0.5  $P(|\bar{x} - m_{\bar{x}}| < 0,5) = ?$

2.3. Вероятность успешного запуска ракеты равна 0.75. Найти вероятность того, что из 10 запусков 8 будут успешными  $P_{10}(8 - \text{успешных}) = ?$

2.4. На предприятии, выпускающем кинескопы, 0.8 всей продукции выдерживает гарантийный срок. С вероятностью, превышающей 0.95, найти пределы, в которых находится доля кинескопов, выдерживающей гарантийный срок, из 8000 кинескопов.

**Практическое занятие 5.** Первичная обработка статистических данных.

## Теоретические вопросы

6. Генеральная совокупность и выборка. Способы формирования выборок.
7. Генеральная средняя, генеральная дисперсия, выборочная средняя, исправленная дисперсия, стандартное отклонение, мода, медиана.
8. Вариационный ряд. Построение статистических таблиц по не сгруппированным и сгруппированным данным.
9. Эмпирическая функция распределения.
10. Полигон частот, гистограмма.

## Домашнее задание

Время, которое затрачивается работниками справочно-информационного фонда учреждения для обслуживания запросов, является случайной величиной. Можно считать, что в течение дня поступает 500 запросов. Главный менеджер компании решил предпринять выборочную проверку и выбрал 50 запросов из 500, поступивших за день, чтобы иметь

представление об общем времени, необходимом для обслуживания всех поступивших запросов. Время (в минутах), истраченное на обслуживание выбранных запросов, следующее: 10; 20; 30; 18; 20; 10; 20; 20; 40; 38; 27; 24; 20; 18; 24; 30; 15; 15; 35; 45; 35; 18; 15; 24; 18; 15; 38; 30; 24; 20; 20; 18; 10; 15; 18; 10; 20; 24; 27; 15; 20; 18; 27; 35; 20; 15; 18; 20; 27; 20.

Используя функции, вычислите:

\* минимальное значение данных наблюдений;

\* максимальное значение данных наблюдений;

\* выборочную среднюю;

\*5 моду;

\*6 медиану;

\*7 исправленную дисперсию;

\*8 стандартное отклонение.

Постройте диаграмму, на которой показаны значения случайной величины и их относительные частоты.

На основе выборки найдите оценку общего времени, необходимого для обслуживания всех запросов.

Сколько сотрудников должно работать в справочно-информационной службе?

### Практическое занятие 6. Интервальные оценки

#### Теоретические вопросы

6. Доверительный интервал, доверительная вероятность.
7. Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии.
8. Распределение Стьюдента. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии.
9. Распределение  $\chi^2$ . Доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратического отклонения.
10. Доверительный интервал для вероятности.

#### Практические задания

2. Перед постом ГАИ висит знак, ограничивающий скорость движения 50 км/час. Была зарегистрирована скорость случайно выбранных 40 машин, проезжающих мимо поста ГАИ:

49	83	58	65	68	60	76	86	74	53
71	74	65	72	64	42	62	62	58	82
78	64	55	87	56	50	71	58	57	75
58	86	64	56	45	73	54	86	70	73

Постройте 90%, 95% и 97% доверительные интервалы для средней скорости машин. Какой вывод можно сделать, основываясь на этих данных? (ОПК-5, ПК-25)

4. Спортивный клуб проводит курс оздоровительных мероприятий для своих членов. Чтобы определить эффективность выбранных процедур оздоровления, был измерен вес 10 случайно выбранных членов клуба до проведения мероприятий по оздоровлению, и 10 других - после. Результаты приведены в таблице:

До	68	65	66	66	67	66	66	64	69	63
После	65	62	64	65	65	64	59	63	65	68

Постройте 90%, 95% и 97% доверительные интервалы для:  
 среднего веса членов клуба перед курсом;  
 среднего веса членов клуба после курса;

Какой вывод можно сделать об эффективности курса? (ОПК-5, ПК-25)

5. Случайная выборка 800 домохозяек в центре города, проведенная утром, показала, что 480 из них хотели бы, чтобы торговый центр города был свободен от транспорта. Определите доверительные пределы с вероятностью 90% от доли всех домохозяек в городе, кто хотел бы, чтобы торговый центр был свободен от транспорта.

Мисс Сэлли Бриггс работает менеджером по продаже кондитерских изделий. При изучении случайной выборки 200 выпусков в Уэльсе она обнаружила, что для 50 из них желательно изменение ассортимента продукции.

Требуется:

- Найти 95%-ный доверительный интервал для доли потребителей в Уэльсе, для которых желательно изменение ассортимента.
- Мисс Бриггс собирается провести такое же обследование в Шотландии и решила достичь оценки доли потребителей новой продукции в пределах  $\pm 4\%$ . Насколько большей должна быть выборка в Шотландии! Предполагается, что она определяет доверительный интервал с вероятностью 95%.

### Практическое занятие 7. Статистическая гипотеза.

#### Теоретические вопросы

9. Статистические гипотезы и их прикладное назначение.
10. Критическая область и область принятия решения.
11. Ошибки первого и второго рода.
12. Распределение  $\chi^2$ . Критерий Пирсона.
13. Эмпирические и теоретические частоты.
14. Построение таблицы для проверки гипотезы о нормальном законе распределения генеральной совокупности.
15. Построение таблицы для проверки гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.
16. Построение таблицы для проверки гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности.

#### Практические задания

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности  $X$  с заданным эмпирическим распределением.

Номер интервала $i$	Граница интервала		Частота $m_i$
	$x_i$	$x_{i+1}$	
1	-20	-10	20
2	-10	0	47
3	0	10	80
4	10	20	89
5	20	30	30
6	30	40	40
7	40	50	50

2. В течение 10 часов регистрировали прибытие автомашин к бензоколонке и получили эмпирическое распределение, приведенное в таблице (в первом столбце указан интервал времени в часах, во втором столбце – частота, т.е. количество машин, прибывших в этом

интервале). Всего было зарегистрировано 200 машин. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что время прибытия машин распределено равномерно.

$x_{i-1} - x_i$	$m_i$
8-9	12
9-10	40
10-11	22
11-12	16
12-13	28
13-14	6
14-15	11
15-16	33
16-17	18
17-18	14

3. В итоге проверки на нестандартность 200 ящиков консервов получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество  $x_i$  нестандартных коробок консервов в одном ящике; во второй строке – частота  $m_i$ , т.е. число ящиков содержащих  $x_i$  коробок нестандартных консервов). Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина  $X$  – число нестандартных коробок – распределена по закону Пуассона.

$x_i$	0	1	2	3	4
$m_i$	132	43	20	3	2

**Приложение 1. Аннотация  
рабочей программы дисциплины**

### **АННОТАЦИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» реализуется на *экономическом факультете кафедрой моделирования в экономике и управлении.*

Цель дисциплины: общематематическая подготовка студентов, необходимая для освоения математических и статистических методов в управлении и экономике; воспитание у студентов навыков логического мышления и формального обоснования принимаемых решений.

Задачи дисциплины:

- изучение основ математического аппарата;
- выработка навыков решения типовых вероятностных задач;
- развить логическое и алгоритмическое мышление, умение строго излагать свои мысли;
- выработка навыков к математическому исследованию теоретических и практических задач экономики и управления;
- сформировать умение выбирать математический инструментарий для построения моделей экономических и управленческих процессов, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы.

Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций:

- ОПК-2 Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач
- ОПК-2.1 Использует методы сбора, анализа и оценки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике
- ОПК-2.2 Анализирует результаты экономико-статистических исследований и делает на их основе качественные и количественные выводы для решения практических задач

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:** методы сбора, анализа и обработки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике; методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

**Уметь:** использовать методы сбора, анализа и оценки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике; оценить и проанализировать результаты экономико-статистических исследований и делает на их основе качественные и количественные выводы для решения практических задач.

**Владеть:** навыками применения современного математического инструментария для сбора, анализа и оценки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике; методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки и анализа результатов экономико-статистических исследований.

По дисциплине предусмотрена промежуточная аттестация в форме *зачета с оценкой.*

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 3 зачетных единиц.